Zusammenfassung KomAn D-ITET

Manuel Meier

23. Juli 2015

Komplexe Zahlen und Funktionen

Komplexe Zahlen - Grundlagen

- $i^2 = (-i)^2 = -1$ und $\frac{1}{i} = -\frac{-1}{i} = -\frac{i^2}{i} = -i$
- $z = x + iy$ mit $z \in \mathbb{C}$
- $z + z' = (x + x') + i(y + y')$
- $z \cdot z' = xx' - yy' + i(x'y + y'x)$
- $\alpha z = \alpha x + i\alpha y$
- $\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$
- $\overline{z} = x - iy = r \cdot e^{-i\varphi}$
- $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos(y) + i\sin(y))$
- $z^n = (r \cdot e^{i\varphi})^n = r^n \cdot e^{i\varphi n}$

Rechenregeln

$x = \text{Re } z = \frac{z+\overline{z}}{2}$ $\quad y = \text{Im } z = \frac{z-\overline{z}}{2i}$

$z \in \mathbb{R} \iff z = \overline{z}$

$\overline{\overline{z}} = z$ $\quad \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{(\overline{z})}$

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ $\quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

(Absoluter) Betrag (Abstand des Punktes (x, y) vom Ursprung):
$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ und somit auch $|z|^2 = z \cdot \overline{z} = x^2 + y^2$

Betrag

$|z \cdot z'| = |z| \cdot |z'|$ (im komplexen!)

$z \in \mathbb{R} \implies |z|_{\mathbb{C}} = |z|_{\mathbb{R}}$

$|\text{Re } z| \leqslant |z|$, $|\text{Im } z| \leqslant |z|$

$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$ (Dreiecksungleichung)

Der Körper $\mathbb{C}$ ist nicht geordnet und eine **Ungleichung** wie $z_1 < z_2$ **macht keinen Sinn**!

Mitternacht

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Polardarstellung

Form

$\boxed{z = re^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ mit $r \in \mathbb{R}^+ (r \geqslant 0)$

kartesisch→polar

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$\arg\,(z) = \arg\,(x, y) = \{\varphi + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\} \implies \boxed{\varphi \in \arg\,z}$

Innerhalb $[-\pi, \pi]$ lässt sich φ so berechnen:

$$\varphi = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} & \text{für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi & \text{für } x < 0, y \geqslant 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi & \text{für } x < 0, y < 0 \\ +\pi/2 & \text{für } x = 0, y > 0 \\ -\pi/2 & \text{für } x = 0, y < 0 \\ \textit{undef.} & \text{für } x = 0, y = 0 \end{cases}$$

polar→kartesisch

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

komplexe Multiplikation

$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$z^n = r^n \cdot e^{in\varphi}$

n-te Wurzel $\implies$ genau n Lösungen!

$\boxed{\sqrt[n]{z} = w_k = |z|^{\frac{1}{n}} e^{i(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n})}}$ mit $k = 0, 1, \ldots, n-1$

Hauptwert des Arguments (eindeutig!)

$\boxed{\varphi = \text{Arg}(z)} \implies \boxed{\text{Arg } \overline{z} = -\text{Arg } z}$

z liegt auf der positiven reellen Achse: $\iff$ Arg $z = 0$

z auf negativen reellen Achse $\iff$ Arg-Funktion kann z nicht abbliden

Periodizitäten

- $1 \cdot e^{2\pi ik} = 1$ für alle $k \in \mathbb{Z}$
- $e^{\frac{\pi}{2}ik} = i$
- $e^{-\frac{\pi}{2}ik} = -i$
- $e^{-2\pi ik} = 1$
- $e^{\pi ik} = (-1)^k$
- $e^{-\pi ik} = (-1)^k$

Winkel

$\angle°$	$\angle$ rad	sin	cos	tan
0	0	0	1	0
30	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\pm\infty$

Ableitungsregeln

$(f + g)' = f' + g'$ $\quad (cf)' = cf'$ $\quad (fg)' = f'g + fg'$

$\boxed{\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}}$ $\quad (g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

Mengen

- $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \backslash \{0\}$
- $\mathbb{C}^{-*} = \mathbb{C} \backslash \{z \in \mathbb{R} : z \leqslant 0\}$
- $S = \{x + iy : -\pi < y < \pi\} = \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}(z)| < \pi\}$

Trigonometrische Funktionen

$\boxed{\cos(x) = \text{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}}$ $\quad \boxed{\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}}$

$\boxed{\sin(x) = \text{Im}(e^{ix}) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}}$ $\quad \boxed{\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}}$

$\boxed{\sin(iz) = i \cdot \sinh(z)}$ und $\boxed{\cos(iz) = \cosh(z)}$

$\boxed{\sinh(\pm iz) = \pm i \cdot \sin(z)}$ und $\boxed{\cosh(\pm iz) = \cos(z)}$

Komplexwertige Funktionen

Begriffe aus der Topologie

Umgebung: (Beliebig kleine) Kreisscheibe um einen Punkt z.
innerer Punkt: Der Punkt z befindet sich in einer Menge und berührt den Rand nicht.
Randpunkt: z befindet sich auf dem Rand einer Menge.
Berührungspunkt: z sitzt in oder auf dem Rand einer Menge.
offene Teilmenge: Teilmenge ohne Rand.
abgeschlossene Teilmenge: Teilmenge mit Rand **beschränkte Teilmenge**: Für jeden Punkt z einer Teilmenge S gilt: $|z|$ ist kleiner als eine Konstante M.
kompakte Teilmenge: abgeschlossen und beschränkt.
zusammenhängende Teilmenge: Jeder Punkt der Teilmenge kann mit jedem anderen Punkt der Menge nur über andere Punkte der Menge verbunden werden (keine Ïnseln").
Gebiet: zusammenhängende offene Teilmenge.

Komplexe Funktionen

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ oder $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$f(z)$ ist das **Bild** von z und z ist das **Urbild** (nicht immer eindeutig) von $w = f(z)$.

Hauptwert der n-ten Wurzel (principal value, kurz: **pv**):

$$\boxed{\begin{aligned} \text{pv } \sqrt[n]{w}: \quad & \mathbb{C}^{-x} \to S = \{z \in \mathbb{C}^* | -\tfrac{\pi}{n} < \text{Arg } z < \tfrac{\pi}{n}\} \\ & w \mapsto \sqrt[n]{|w|} e^{i\frac{\text{Arg } w}{n}} \end{aligned}}$$

Komplexe Exponentialfunktion

$$\boxed{\text{epx } : \mathbb{C} \to \mathbb{C}\ ,\ z \mapsto w = \exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k}$$

Es gelten folgende Umformungen:

$\exp(z+z') = \exp\ z \cdot \exp\ z'$ mit $z, z' \in \mathbb{C}$
$e^z = \exp\ z$
$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ für reelle φ
Aus letzterem folgt insbesondere:
$e^{2\pi i} = 1$ und
$\exp(z + 2\pi i) = \exp\ z \cdot \exp(2\pi i) = \exp\ z$

Logarithmus
Da die Exponentialfunktion im komplexen periodisch ist, ist der komplexe Logarithmus als Menge definiert:

$\log w = \{z \in \mathbb{C} \mid e^z = w\} \subseteq \mathbb{C}$

Auch hier will man mit einem konkreten Wert rechnen können. Deshalb ist der **Hauptwert des Logarithmus** wie folgt definiert:

$\mathrm{Log}\ : \mathbb{C}^{-*} \to \mathbb{C}\ ,\ w \mapsto \ln|w| + i\ \mathrm{Arg}\ w$

Hier ist Log nun injektiv und der *eindeutig bestimmte Repräsentant* von $\log\ w$ im Streifen $S = \{z \in \mathbb{C} \mid |\mathrm{Im}\ z| < \pi$.

Potenz
Für alle $a \in \mathbb{C}^{-*}$ (nur für diese!) ist der **Hauptwert der Potenz**:

$\mathrm{pv}\ a^z = \exp(z\mathrm{Log}\ a)$ und es gilt: $\mathbf{pv}\ a^{z+z'} = \mathbf{pv}\ a^z \cdot \mathbf{pv}\ a^{z'}$

Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

Im folgenden untersuchen wir Real- und Imaginärteil von *analytischen* Funktionen ($f : \Omega \to \mathbb{C}$):
$f = u(x,y) + iv(x,y)\ (x + iy \in \Omega)$

Obige Funktion hat *stetige partielle Ableitungen* nach x und y zwischen denen die **Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen** gelten:

$u_x(x,y) = v_y(x,y)$
$v_x(x,y) = -u_y(x,y)$ $(x + iy \in \Omega))$

Anwendung der CR-Differentialgleichungen

u_x, u_y und v_x, v_y existieren und erfüllen die *CR-Differentialgleichungen*
$\Longleftrightarrow$
$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ analytisch bzw. holomorph auf Ω
$\Longleftrightarrow$
$f' = f_x = u_x + iv_x$
$f' = -if_y = v_y - iu_y$
$\Longleftrightarrow$
f komplex differenzierbar
$\Longleftrightarrow$
f ∞-mal komplex differenzierbar

Beispiele

- $f(z) = \overline{z}$ ist *nicht* differenzierbar, da die CR-Gleichungen nicht erfüllt sind.
- $f(z) = |z|^2$ ist **keine analytische Funktion** im Ursprung. (Die Ableitung von f existiert nur im Ursprung.) Eine Funktion heisst analytisch in z_0, falls sie in einer *ganzen Umgebung* von z_0 analytisch ist.
- $\mathrm{Log}\ z = \ln|z| + i\mathrm{Arg}\ z\ (z \in \mathbb{C}^{-*})$ ist analytisch auf $\mathbb{C}^{-*}$.

Die CR-Differentialgleichungen in Polarkoordinaten sind:

$u_r = \frac{1}{r} v_\varphi$ $\quad v_r = \frac{-1}{r} u_\varphi$

$x = r\cos\varphi$ $\quad y = r\sin\varphi$

Die Integralformel von Cauchy

Theorie Übung

Integral reeller Variablen ("dx" ist hier reell)
$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, dann:

$\int_a^b g(x)\ dx =$ "Wie im reellen" $= \int_a^b \mathrm{Re}(g(x))\ dx + i\int_a^b \mathrm{Im}(g(x))\ dx$

Regeln:
$\left|\int_a^b f(x)\ dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\ dx$ und $\overline{\int_a^b f(x)\ dx} = \int_a^b \overline{f(x)}\ dx$

Eine Kurve / ein Weg
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig und stückweise glatt

Spur von γ: $\mathrm{sp}(\gamma) = \{$Menge aller Bildpunkte von $\gamma\}$

Länge der Kurve: $= \int_a^b |\dot\gamma(t)|\ dt$

Komplexes Linienintegral der Funktion f über der Kurve γ
$f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, Parametrisierung $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$; dann gilt:

$\int_\gamma f(z)\ dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot\gamma(t)\ dt$ wobei dt wieder reell ist.

Es gilt: $\int_{-\gamma} f(z)\ dz = -\int_\gamma f(z)\ dz$

Parametrisierungen
(können auch AUFGETEILT werden: $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$)
Gerader / direkter Weg von a nach b:

$\gamma(t) = a(1-t) + bt = a + t(b-a) \quad 0 \leqslant t < 1 \quad \dot\gamma(t) = b - a$

Kreis **gegen** den Uhrzeigersinn mit Radius r um Mittelpunkt a:

$\gamma(t) = a + re^{it} \quad 0 \leqslant t < 2\pi \quad \dot\gamma(t) = ire^{it}$

Einheitskreis **im** Uhrzeigersinn um den Ursprung ($a = 0$):

$\gamma(t) = 1 \cdot e^{-it} \quad 0 \leqslant t < 2\pi \quad \dot\gamma(t) = -ie^{-it}$

Funktion $y = f(x)$:

$\gamma(t) = f(t)$

Satz von Cauchy
Sei Ω ein *einfach zusammenhängendes* Gebiet (= offen, keine Löcher) und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *analytisch*. Dann gilt für jede geschlossene Kurve ("Zyklus")"γ mit $a = b$: $\oint_\gamma f(z)\ dz = 0$

und deshalb folgt für alle Kurven γ_1 und γ_2 mit demselben Anfangspunkt a und Endpunkt b:

$\int_{\gamma_1} f(z)\ dz = \int_{\gamma_2} f(z)\ dz$

$\Longrightarrow$ Der Wert des Integrals ist **WEGUNABHÄNGIG**!

Stammfunktion
Sei Ω ein beliebiges Gebiet. F heisst Stammfunktion von f, falls $F'(z) = f(z)$ für alle z in Ω.

Falls diese existiert gilt für jede Kurve γ mit Anfangspunkt a und Endpunkt b:
$\int_\gamma f(z)\ dz = F(b) - F(a)$
also insbesondere bei geschlossenen Kurven $\cdots = 0$!

Integralsatz von Cauchy
$f : \Omega \to \mathbb{C}$ analytisch, Ω einfach zusammenhängend, γ ein beliebiger Zyklus welcher den Punkt $a \in \Omega \backslash \mathrm{sp}(\gamma)$ $n(\gamma, a)$-mal *gegen den Uhrzeigersinn* umläuft:

$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\ dz = 2\pi i \cdot n(\gamma, a) \cdot f(a)$

Integralsatz von Cauchy für höhere Ableitungen
Sei f analytisch auf ganz Ω und K eine Kreisscheibe innerhalb von Ω mit Rand ∂K (hier wird im Gegenuhrzeigersinn darüber integriert!). Dann gilt für alle $n \geqslant 0$:

$f^{(n)}(a) \cdot n(\gamma, a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\ dz$

Analog:

$\frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a) \cdot n(\gamma, a) = \int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\ dz$

Reihen

Gewöhnliche Reihen und Potenzreihen

Gewhönliche Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

Potenzreihe (mit Entwicklungspunkt z_0) $\sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^k$

Überführen der beiden verschiedenen Reihen
Wir können immer $z_0 = 0$ annehmen oder $w = z - z_0$ substituieren und erhalten dann:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$ mit $a_k = b_k z^k$

Konvergenzradius (für alle Reihen)

Der Index ($k = \dots$) ist für den Konvergenzradius **nicht relevant!** (Kann z.B. auch $k = 2$ sein.)

Quotientenkriterium:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in \mathbb{C}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{konvergiert absolut, falls } |q| < 1 \\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{divergiert, falls } |q| > 1 \end{cases}$$

Wurzelkriterium:

$q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$

und die Reihe konvergiert für $q < 1$ und divergiert für $q > 1$.

Potenzreihen

Form $\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k}$

Ableitung

$$\boxed{f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\cdot a_k (z-z_0)^{k-n}}$$

Konvergenzradius (Potenzreihen)

Potenzreihen konvergieren auf Kreisscheiben mit Konvergenzradius ρ:

Quotientenkriterium

$$\boxed{\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}}$$

Wurzelkriterium

$$\boxed{\rho = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}}}$$

Am Rand der Konvergenzkreisscheibe verhalten sich die Reihen unterschiedlich.

Taylorreihe

$$\boxed{f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k} \qquad \forall z \in B(z_0, \rho)$$

Wichtige Potenzreihen

geometrische Reihe:

$$\frac{1}{1-\left(\frac{z}{c}\right)^d} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{c}\right)^{d\cdot k} \iff \left|\frac{z}{c}\right| < 1 \qquad \text{mit } \rho = 1$$

$$\frac{1}{c\left(1-\frac{z}{c}\right)^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{c}\left(\frac{z}{c}\right)^{k-1} \iff \left|\frac{z}{c}\right| < 1 \qquad \text{mit } \rho = c$$

Wichtige Umformung für geom. Reihe:

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2-z+1-1} = \frac{1}{1-(z-1)} = \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k \text{ für } |z-1| < 1$$

$$e^z = \exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \frac{z^4}{24} \qquad \text{mit } \rho = \infty$$

$$\operatorname{Log}(z) = \operatorname{Log}(z_0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (z-z_0)^k}{k \cdot z_0{}^k}$$

$$\sin(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k+1}}{(2k+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5400} + - \dots$$

$$\cos(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot z^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + - \dots$$

$$e^{iz} = \exp(iz) = \cos(z) + i\sin(z) = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2} + \frac{(ix)^3}{6} + \frac{(ix)^4}{24} + \dots$$
$$= 1 + ix - \frac{x^2}{2} - \frac{ix^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{ix^5}{120} \mp \dots$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \mp \dots + i\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \mp \dots\right)$$

Umrechnung

$$\frac{1}{z+a} = \frac{1}{a+z_0}\,\frac{1}{1-\left(-\left(\frac{z-z_0}{a+z_0}\right)\right)} = \frac{1}{a+z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{z-z_0}{a+z_0}\right)^k$$

Wenn $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$ für $|z-z_0| < \rho$

Dann $f(z) = -\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k$ für $|z-z_0| > \rho$

(Begründung hinschreiben!)

Laurentreihen

$\boxed{\text{Entwicklung möglich } \iff \textbf{KEINE Singularität auf Kreisring!}}$

$\boxed{f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k} \iff$ $f(z)$ analytisch auf einem Kreisring $a < |z-z_0| < b$

Hauptteil

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} a_k (z-z_0)^k$$

Nebenteil

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$

Koeffizienten (wobei gilt: $\partial B = \partial B(z_0, r)$!)

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial B} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{k+1}}dz$$

↳ eigentlich NIE so berechnen, ist nur nützlich für Residuensatz und um Integrale zu bestimmen!

isolierte Singularität (z_0)

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, $z_0 \in \Omega$ und $f : \Omega\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ analytisch.
Falls f in z_0 nicht definiert oder analytisch $\to z_0$ ist Singularitt
z_0 ist isolierte Singularitt von f, falls $\exists \epsilon > 0$, s.d. f keine weitere Singularitten in der Scheibe $B(z_0, \epsilon)$ hat.
Def. Der negative Teil der Laurent-Entwicklung ist ihr **Hauptteil**

Hebbare Singularitt

- Die Koeffizienten c_n der L-E um z_0 mit $n \leq -1$ sind Null, d.h. der Hauptteil der L-E ist Null
  f lsst sich analytisch in z_0 fortsetzten.
- $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert in $\mathbb{C}$ (ist nicht ∞)
- f ist beschrnkt auf einer punktierten Kreisscheibe $B(z_0, \rho)\backslash\{z_0\}$, $\rho > 0$

Pole

- Es gibt nur endlich viele c_n der L-E um z_0 mit $n \leq -1$, d.h. der Hauptteil der L-E hat die Form:
  $\frac{c_{-1}}{z-z_0} + \dots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m}$
  und z_0 ist ein **Pol der Ordnung m**
- $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$
- $\exists n \geq 1$, s.d. $\lim_{z\to z_0} (z-z_0)^n f(z) = \lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$
- Auf $B(z_0, r)$ gilt $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^m} g(z)$, wobei $g(z) \neq 0$ holomorph

Wesentlich Singularitten

- Es gibt unendlich viele c_n der L-E um z_0 mit $n \leq -1$
- $\lim_{z\to z_0} f(z)$ existiert nicht
- Auf jedem noch so kleinen $B(z_0, r)$ gilt, dass $f(z)$ jeden Wert $w \in \mathbb{C}^*$ unendlich oft annimmt.

Nullstellen einer Analytischen Funktion

n-Fache Nullstelle: $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{n-1}(z_0) = 0$, aber $f^{(n)}(z_0) \neq 0$
Bei einer n-fachen Nullstelle in z_0 gilt:

$$f(z) = \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = (z-z_0)^n \sum_{k=n}^{\infty} a_k (z-z_0)^{k-n}$$
$$= (z-z_0)^n g(z) \qquad \text{mit } g(z_0) = a_k \neq 0$$

Bem. Analytische Funktionen knnen nur isolierte Nullstellen besitzen
Sei f analytisch in $z = z_0$, $z = z_0$ eine n-fache Nullstelle und h analytisch mit $h(z_0) \neq 0$. Dann gilt:

$$\frac{1}{f(z)} \text{ und } \frac{h(z)}{f(z)}$$

haben bei $z = z_0$ einen n-fachen Pol.

Bem. f ist analytisch bei ∞ (oder hat Singularitt / Nullstelle), wenn dies fr $g(z) = f(1/z)$ im Ursprung gilt.
Bem. Eine analytische Funktion, deren Singularitten auf $\mathbb{C}$ nur Pole sind, heisst **meromorph**

nicht isolierte Singularität

Hat keinen Typ. Bsp: $z_0 = 0$ bei $\dfrac{1}{\sin(\frac{1}{z})}$

Der Residuensatz

Residuensatz

$$\oint_{\partial\Omega} f(z)dz = 2\pi i \sum_{z_i \in \Omega} \operatorname{res}\big(f\big|z_i\big) \cdot n(\gamma(t), z_i)$$

($n(\gamma(t), z_i)$ normalerweise $= \pm 1$)

Residuenberechnung

1. $\boxed{\operatorname{res}\big(f\big|z_0\big) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)}$
   falls z_0 ein **Pol erster Ordnung** ist.

2. $\boxed{\operatorname{res}\big(f\big|z_0\big) = \lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{(m-1)!} \left(\dfrac{d}{dz}\right)^{m-1} \Big[(z - z_0)^m f(z)\Big]}$
   falls z_0 **Pol m-ter Ordnung**

3. $\boxed{\operatorname{res}\big(f\big|z_0\big) = \dfrac{p(z_0)}{q'(z_0)}}$ falls $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$
   und $q(z)$ in z_0 eine **einfache Nullstelle** hat.
   ($p(z)$ und $q(z)$ analytisch, aber nicht unbedingt Polynome!)

4. $\operatorname{res}\big(f\big|z_0\big) =$ Koeffizienten von z^{-1} der innersten Laurentreihe um den Punkt z_0. ($= a_{-1}$)

5. $\operatorname{res}\big(f\big|z_0\big) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B} f(z)dz$ mit $\partial B = \partial B(z_0, r)$

6. $\operatorname{res}\big(f\big|z_0\big) = 0$
   falls $z_0 = 0$ und $f(z)$ gerade (Laurentreihe hat nur gerade Koeff.)

Integralabschätzungen

$$\lim_{R\to\infty} \left(\left|\int_{S_R} f(z)dz\right|\right) \leqslant \lim_{R\to\infty} \pi \cdot R \cdot \max\left(|f(z)|\right)$$

wobei $S_R =$ Halbkreis, $R \to \infty$

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{|z-z_0|=\epsilon, \operatorname{Im}(z)>0} f(z)dz = \pi \cdot i \cdot \operatorname{res}(f|z_0)$$

(Halbkreis um Singularität)

Einige Anwendungen des Residuensatzes

1. $$\int_0^{2\pi} f(\cos(\varphi), \sin(\varphi))d\varphi = \frac{1}{i} \int_{|z|=1} \frac{1}{z} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right) dz$$
   $$= 2\pi \sum_{z_i \in \partial B(0,1)} \operatorname{res}\Big(\frac{1}{z} f\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\Big| z_i\Big)$$

2. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{z_i \in H^+} \operatorname{res}\big(f\big|z_i\big) + \pi i \sum\limits_{z_i \in \mathbb{R}} \operatorname{res}\big(f\big|z_i\big) \\ -2\pi i \sum\limits_{z_i \in H^-} \operatorname{res}\big(f\big|z_i\big) - \pi i \sum\limits_{z_i \in \mathbb{R}} \operatorname{res}\big(f\big|z_i\big) \end{cases}$$
   falls $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ und $\deg(p) \leqslant \deg(q) - 2$

3. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\alpha x}dx = \begin{cases} 2\pi i \sum\limits_{z_i \in H^+} \operatorname{res}\big(f(z)e^{i\alpha z}\big|z_i\big) & \alpha \geqslant 0 \\ -2\pi i \sum\limits_{z_i \in H^-} \operatorname{res}\big(f(z)e^{i\alpha z}\big|z_i\big) & \alpha \leqslant 0 \end{cases}$$
   falls $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$ und $q(z) \neq 0 \ \forall z \in \mathbb{R}$ und $\deg(p) \leqslant \deg(q) - 2$

4. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)dx = \begin{cases} -2\pi \cdot \operatorname{Im}\left(\sum\limits_{z_i \in H^+} \operatorname{res}\big(f(z)e^{i\alpha z}\big|z_i\big)\right) & \alpha \geqslant 0 \\ 2\pi \cdot \operatorname{Im}\left(\sum\limits_{z_i \in H^-} \operatorname{res}\big(f(z)e^{i\alpha z}\big|z_i\big)\right) & \alpha \leqslant 0 \end{cases}$$
   $\to$ *gleiche Bedingungen wie bei 3.*

5. $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\alpha x)dx = \begin{cases} 2\pi \cdot \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{z_i \in H^+} \operatorname{res}\big(f(z)e^{i\alpha z}\big|z_i\big)\right) & \alpha \geqslant 0 \\ -2\pi \cdot \operatorname{Re}\left(\sum\limits_{z_i \in H^-} \operatorname{res}\big(f(z)e^{i\alpha z}\big|z_i\big)\right) & \alpha \leqslant 0 \end{cases}$$
   $\to$ *gleiche Bedingungen wie bei 3.*

Dabei ist mit H^+ die obere Halbebene, und mit H^- die untere Halbebene gemeint. Also folgt:
$z \in H^+$: Singularitäten liegen auf der **oberen Halbebene**
$z \in H^-$: Singularitäten liegen auf der **unteren Halbebene**
$z \in \mathbb{R}$: Singularitäten liegen auf der **reellen Achse**

Fourierreihen, Fouriertransformation und Laplacetransformation

Fourierreihe

$$\boxed{f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{k\frac{2\pi i}{T}t} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) + b_k \sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right)}$$

mit $c_k \in \mathbb{C}$ und $a_k, b_k \in \mathbb{R}$

Fourierkoeffizienten

$$\boxed{a_k = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) dt}$$

$$\boxed{b_k = \frac{2}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) dt}$$

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} f(t)e^{-k\frac{2\pi i}{T}t}dt}$$

Sonderfälle

- f **gerade**: $f(t) = f(-t)$
  $\boxed{b_k = 0}$ bzw. $c_k = c_{-k}$ $\forall k$
  und $\boxed{a_k = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) dt}$
- f **ungerade**: $f(t) = -f(-t)$
  $\boxed{a_k = 0}$ bzw. $c_k = -c_{-k}$ $\forall k$
  und $\boxed{b_k = \dfrac{4}{T} \displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin\left(k\frac{2\pi}{T}t\right) dt}$

Legende
T_0: Beliebiger Startzeitpunkt, meistens $= 0$
T: **Fundamentalperiode** (kleinst mögliche Periode)
$\dfrac{a_0}{2}$: **arithmetisches Mittel** von $f(t)$

ACHTUNG: c_0 und a_0 müssen **einzeln** berechnet werden für $k = 0$!

Koeffizientenumrechnung

$$c_k = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_{(-k)} + ib_{(-k)}) & k < 0 \\ \frac{1}{2}(a_k - ib_k) & k > 0 \\ \frac{a_0}{2} & k = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} a_0 &= 2 \cdot c_0 \\ a_k &= c_k + c_{(-k)} \\ b_k &= i(c_k - c_{(-k)}) \end{aligned}$$

Fundamentalintegrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt)\ \mathrm{d}t = 0 \quad \text{für} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt)\ \mathrm{d}t = 0 \quad \text{für} \quad k \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^{2\pi} e^{ikt}\ \mathrm{d}t = 0 \quad \text{für} \quad k \neq 0 \text{ und } k \in \mathbb{Z}$$

$$\int_{|z|=r} z^k\ \mathrm{d}z = 0 \quad \text{für} \quad k \neq -1 \text{ und } k \in \mathbb{Z}$$

Satz von Parseval

$$\|f\|_2 = \frac{1}{T} \int_{T_0}^{T_0+T} |f(t)|^2\ \mathrm{d}t = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)}\ \mathrm{d}t \quad \text{falls } f, g \ 2\pi\text{-periodisch}$$

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\overline{g(t)} dt \quad \text{sonst}$$

Faltung

$$(f * g)(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\tau)g(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau \quad \text{falls } f, g \ 2\pi\text{-periodisch}$$

$$(f * g)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)\ \mathrm{d}\tau \quad \text{sonst}$$

Fouriertransformation

$$\boxed{\widehat{f}(\omega) = \mathcal{F}\{f(x)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}\ \mathrm{d}t} \quad \text{falls} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\ \mathrm{d}t < \infty$$

Rücktransformation

$$\boxed{f(t) = \mathcal{F}\{\widehat{f}(\omega)\}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(w)e^{i\omega t}\mathrm{d}w} \quad \text{falls} \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(w)|\mathrm{d}w < \infty$$

Sonderfälle

f **gerade**: $f(t) = f(-t) \implies \widehat{f}(\omega) = \widehat{f}(-\omega)$

f **ungerade**: $f(t) = -f(-t) \implies \widehat{f}(\omega) = -\widehat{f}(-\omega)$

Beispiele

$$f(x) = \begin{cases} 1 & -a \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \iff \hat{f}(\omega) = \frac{2\sin(\omega a)}{\omega}$$

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad a > 0 \iff \hat{f}(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

$$f(x) = \frac{1}{k^2 + x^2} \quad k > 0 \iff \hat{f}(\omega) = \frac{\pi}{k} e^{-k|\omega|}$$

Rechenregeln

Funktion	*Fourier-Transformierte*	*Erklärung*
$f(x)$	$\hat{f}(\omega)$	Transformation
$a \cdot f(x) + b \cdot g(x)$	$a \cdot \hat{f}(\omega) + b \cdot \hat{g}(\omega)$	Linearität
$f(x-a)$	$e^{-i\omega a}\hat{f}(\omega)$	Verschiebung im Zeitbereich
$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}\hat{f}(\frac{\omega}{a})$	Streckung im Zeitbereich
$e^{ibx}f(x)$	$\hat{f}(\omega - b)$	Verschiebung im Frequenzbereich
$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^n f(x)$	$(i\omega)^n \hat{f}(\omega)$	Zeitliche Ableitung
$x^n f(x)$	$i^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\right)^n \hat{f}(\omega)$	Ableitung im Frequenzbereich
$(f * g)(x)$	$\hat{f}(\omega) \cdot \hat{g}(\omega)$	Faltung im Zeitbereich
$f(x) \cdot g(x)$	$\frac{1}{2\pi}(\hat{f} * \hat{g})(\omega)$	Faltung im Frequenzbereich
$\hat{f}(x)$	$2\pi f(-\omega)$	Dualität

Laplacetransformation

$$\boxed{F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt} \quad \text{mit } f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(s)e^{st}\ \mathrm{d}s$$

Wobei $s = \sigma + i\omega$ und σ so gewählt werden muss, dass die Integrale konvergieren.

Hier (KomA) wird bei der Laplacetrafo $f(t)$ immer $= 0$ gesetzt, wenn $t < 0$!

Dies geschieht mit Hilfe der
Heavyside Sprungfunktion

$$\boxed{H(T) = \begin{cases} 1 & t \geqslant 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}}$$

DGl mit Laplace lösen

- DGL Laplace transformieren (rechte und linke Seite) mit Hilfe der Tabellen.
- Anfangswerte in transformierte DGL einsetzen.
- DGL nach $Y(s)$ auflösen.
- Ergebnis wieder mit Tabellen rücktransformieren (ev. mit Partialbruchzerlegung, ...).

Wichtigste Identitäten

$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\ \mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s)G(s)$
$f(at)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{\lvert a\rvert}F(\frac{s}{a})$
$f(t)e^{at}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$F(s-a)$
$f'(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$sF(s) - f(0^+)$
$f''(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^2F(s) - sf(0^+) - f'(0^+)$
$f'''(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^3F(s) - s^2f(0^+) - sf'(0^+) - f''(0^+)$
$f(t-a)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$e^{-as}F(s)$
$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^n f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$s^nF(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots$
		$-sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$
$\int_0^t f(\tau)\ \mathrm{d}\tau$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{s}F(s)$
$t^n f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$(-1)^n \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right)^n F(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\int_s^{\infty} F(u)\ \mathrm{d}u$
$f(t+T) = f(t)$	$\circ\!\!-\!\!\bullet$	$\frac{1}{1-e^{-sT}} \int_0^T f(t)e^{-st}\ \mathrm{d}t$
(f ist T-period.)		$= \frac{1}{1-e^{-sT}} \mathcal{L}\{f(t)H(T-t)\}(s)$

Transformationstabelle

$f(t)$	$\mathcal{L}(f)(s) = F(s)$
1	$\frac{1}{s}, \quad s > 0$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}, \quad s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, \quad s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, \quad s > a$
$e^{at}\sin(bt)$	$\frac{b}{(s-a)^2+b^2} \quad s > a$
$e^{at}\cos(bt)$	$\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2} \quad s > a$
$t^n e^{at}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}} \quad s > a$
$af(t) + bg(t)$	$aF(s) + bG(s)$
$tf(t)$	$-F'(s)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f''(t)$	$s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$

Anhang

Trigonometrie

- $\sin(x \pm y) = \sin x \ \cos y \pm \sin y \ \cos x$
- $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$
- $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$
- $\cos 2x = cos^2(x) - sin^2(x) = 1 - 2\,sin^2(x) = 2cos^2(x) - 1$
- $\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x = \sin x\,(4\cos^2 x - 1)$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$
- $\sin 4x = 8 \sin x \cos^3 x - 4\ \sin x \cos x$
- $\cos 4x \ = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1$
- $\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$
- $\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) + \cos(x+y))$
- $\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x-y) + \sin(x+y))$
- $\sin x \cos x = \frac{1}{2}\sin\,(2x)$
- $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x))$
- -$\sin^3 x = \frac{1}{4}(3\sin x - \sin 3x)$
- $\sin^4 x = \frac{1}{8}(\cos(4x) - 4\cos(2x) +$
- -$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x))$
- -$\cos^3 x = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x))$
- -$\cos^4 x = \frac{1}{8}(3 + 4\cos(2x) + \cos(4x))$

- $e^x = \cosh(x) + i\sinh(x)$
- $1 = \cosh^2(x) - \sinh^2(x)$
- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\sinh(\pm ix) = \pm i\sin(x)$
- $\cosh(ix) = \cos\,(x)$

Reihen

- $\cosh x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}(k\ gerade) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m}}{(2m)!}$
- $\sinh x \ = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}(k\ ung.) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
- $\cos x = Re(e^{ix}) = Re\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} Re\,\frac{i^k x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^k x^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{i^{2m} x^{2m}}{(2m)!}$
- $analog\colon \sin x = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{2m+1}}{(2m+1)!}$
- $\tan x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{i(e^{ix} + e^{-ix})} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x}{n+1} = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \cdots$
- $\text{arctanh}\, x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$; $\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
- $beachte\colon i^k = 1\ wenn\ k\ durch\ teilbar \rightarrow i^k = -1\ wenn \frac{k}{4} Rest\ 2\ ergibt \rightarrow \pm i\ sonst$
- $\rightarrow i^2 = \ -1 = (i)^{2m} = (i^2)^m = (-1)^m;$
  Wichtig: $\cosh(\pm ix) = \cos\,(x);$ $\sinh(\pm ix) = \pm i\sin(x)$
- $y \in \mathbb{R}\colon arsinh\ y = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$
  $arcosh\ y = \log\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) \leftarrow y \geq 1$
- $\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = 1 - \frac{2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$
- $\lim_{x\to\infty} \tanh x = 1$
- $\text{arctanh}\, y = \frac{1}{2}\left(\log\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right)$ $f\ddot{u}r\ (-1 < \ y < 1)$
- Useful: $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$; $\arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

- $\cos(z+h) = \cosh(iz+ih) = \cosh(iz)\cosh(ih) + \sinh(iz)\sinh(ih) = \cos(z)\cos(h) + i\sin(z) i\sin(h) = \cos(z)\cos(h) - \sin(z)\sin(h)$